Ομογενής Γ.Δ.Ε. n-τάξης

$a_n(x)y^{(n)}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$, $x\in I$, $a_i\in C(I)$, $a_n(x)\neq 0$ $\forall x\in I$

Θεώρημα Ύπαρξης Μοναδικότητας

Το Π.Α.Τ. (E_0) , $y(x_0)=a_0,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1}$ έχει ακριβώς μία λύση που ορίζεται σε ολόκληρο το I

Θεώρημα 3

Αν $y_1,\ldots,y_k$ λύσεις της (E_0) τότε η $c_1y_1+\ldots+c_ky_k$ είναι επίσης λύση της (E_0) $(\forall c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{R})$

Θεώρημα 4

Ας είναι $y_1,\ldots,y_n$ η λύση της (E_0). Τότε οι $y_1,\ldots,y_n$ είναι γρ. ανεξ. $\Longleftrightarrow$ $W(y_1,\ldots,y_n)(x)\neq 0$ $\forall x\in I$

Απόδειξη Θεωρ. 4

$(\Longleftarrow)$ Ας είναι $y_1,\ldots,y_n$ λύσεις της (E_0) με $W(y_1,\ldots,y_n)(x)\neq 0$ $\forall x\in I$

Ας είναι $x_0\in I$ και $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ με

$$\left.\begin{aligned} &c_1y_1(x_0)+\ldots+c_ny_n(x_0)=0\\ &c_1y_1'(x_0)+\ldots+c_ny_n'(x_0)=0\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &c_1y_1^{(n)}(x_0)+\ldots+c_ny_n^{(n)}(x_0)=0\end{aligned}\right\}$$ Παραγωγίζεται n φορές γιατί y_i λύσεις της (E_0)

Παρατηρώ ότι το σύστημα ως προς $c_1,\ldots,c_n$ είναι γραμμικό ... με Ορίζουσα $=W(y_1,\ldots,y_n)(x_0)\neq 0$ $\Longrightarrow$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την: $c_1=c_2=\ldots=c_n$ άρα $c_1,\ldots,c_n$ γραμμ. ανεξ.

$(\Longrightarrow)$ Ας είναι $y_1,\ldots,y_n$ η γραμμ. ανεξ. λύση της (E_0).

Έστω $\exists x_0\in I$: $W(y_1,\ldots,y_n)(x_0)=0$. Θεωρώ το

$$(S):\left\{\begin{aligned} &c_1y_1(x_0)+\ldots+c_ny_n(x_0)=0\\ &\vdots\\ &c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+c_ny_n^{(n)}(x_0)=0\end{aligned}\right\}$$ ως προς $c_1,\ldots,c_n$

Παρατηρώ ότι η ορίζουσα του (S) : $D=W(y_1,\ldots,y_n)(x_0)=0$ και συνεπώς το (S) δέχεται και μη μηδεν. λύσεις δηλ. $\exists$ $c_1,\ldots,c_n$ με $|c_1|+\ldots+|c_n|\neq 0$ που ικανοποιεί το (S).

Θεωρώ τη συνάρτηση $y(x)=c_1y_1(x)+\ldots+c_ny_n(x)$, $x\in I$ για $c_1,\ldots,c_n$ με $|c_1|+\ldots+|c_n|\neq 0$

Παρατηρώ ότι η y είναι λύση της (E_0) [Θεώρ. 3] με $y(x_0)=y'(x_0)=\ldots=y^{(n-1)}(x_0)=0$ [από το S προφανώς]
Επειδή μία λύση $\tilde{y}$ που ικανοποιεί τις παραπάνω αρχ. συνθήκες είναι η $\tilde{y}=0$, $x\in I$ από το Θεώρ. Υ-Μ έπεται ότι $y(x)=\tilde{y}(x)=0$ και επειδή το σύστημα δέχεται μοναδική λύση, αυτή θα είναι η μηδενική. Δηλ. $c_1y_1+\ldots+c_ny_n=0$, $|c_1|+\ldots+|c_n|\neq 0$
Άρα $y_1,y_2,\ldots,y_n$ γραμ. εξαρτ. ΑΤΟΠΟ

__Θεώρημα 5__

Ας είναι $x_0\in I$ και $y_1,\ldots,y_n$ λύσεις της (E_0). Τότε
$W(y_1,\ldots,y_n)(x)=W(y_1,\ldots,y_n)(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}ds}$, $x\in I$

__Απόδειξη__

Ας είναι $x_0\in I$ και $y_1,\ldots,y_n$ λύσεις της (E_0). Παρατηρώ ότι η

$$W(x)=W(y_1,\ldots,y_n)(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$ παραγωγίζεται στο I και έχω:

$$W'(x)=\cancel{\begin{vmatrix} y_1'(x) & \cdots & y_n'(x)\\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x)\\ \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}}+\ldots+\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ \cdots & & \cdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ \cdots & & \cdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x)\\ -\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(x)}{a_n(x)}y_1^{(i)}(x) & \cdots & -\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(x)}{a_n(x)}y_n^{(i)}(x)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x)\\ \frac{a_i(x)}{a_n(x)}y_1^{(i)}(x) & \cdots & \frac{a_i(x)}{a_n(x)}y_n^{(i)}(x)\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i(x)}{a_n(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x)\\ y_1^{(i)}(x) & \cdots & y_n^{(i)}(x)\end{vmatrix}=0+0+\ldots+0+\ldots-\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ \vdots & & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

δηλ. η $W(x)$ ικανοποιεί τη γραμμ. Δ.Ε. α' τάξης

$$W'(x)=-\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}w(x),\ x\in I \quad \text{άρα}$$

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(s)}{a_n(s)}ds},\ x\in I$$

Ορισμός

Ένα σύνολο n λύσεων της (E_0) $\{y_1,\dots,y_n\}$ καλείται βασικό σύνολο λύσεων (Β.Σ.Λ.) αν οι $y_1,\dots,y_n$ είναι γραμμ. ανεξ. λύσεις.

Θεώρημα 6

Υπάρχουν Β.Σ.Λ. για την (E_0).

Απόδειξη

Ας είναι $x_0 \in I$

και y_1 η λύση του Π.Α.Τ. (E_0) - $y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0,\dots,y_1^{(n-1)}(x_0)=0$

y_2 —— || —— $y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1,\ y_2''(x_0)=0,\dots,y_2^{(n-1)}(x_0)=0$

⋮

y_n —— || —— $y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0,\dots,y_n^{(n-2)}(x_0)=0,\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1$

Παρατηρώ ότι $W(y_1,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$

Άρα απ' το θεώρ. 5 $W(y_1,\dots,y_n)(x)\neq 0\ \ \forall x\in I$

Και άρα οι $y_1,\dots,y_n$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες

δηλαδή το σύνολο $\{y_1,\dots,y_n\}$ είναι ΒΣΛ στην (E_0)

Θεώρημα 7

Ας είναι $\{y_1,\dots,y_n\}$ Β.Σ.Λ. της (E_0) τότε για κάθε y: λύση της (E_0) υπάρχουν μοναδικά $c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$ με $y(x)=c_1y_1(x)+\dots+c_ny_n(x)$, $x\in I$

Απόδειξη

Ας είναι $y(x)$ λύση της (E_0) και $x_0\in I$

Οι αριθμοί $y(x_0)=a_0,\ y'(x_0)=a_1,\dots,y^{(n-1)}=a_{n-1}$ είναι μονοσήμαντα ορισμένοι. Θεωρώ το σύστημα ως προς $c_1,\dots,c_n$

$$\left.\begin{array}{l} c_1y_1(x_0)+\dots+c_ny_n(x_0)=a_0 \\ \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0)+\dots+c_ny_n^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1} \end{array}\right\}(\Sigma)$$

Και παρατηρώ ότι $D = W(y_1,\dots,y_n)(x_0) \neq 0$ γιατί $\{y_1,\dots,y_n\}$ ΒΣΛ
άρα υπάρχουν μοναδικά $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν το (S)
Θέτω $\bar{y}(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, $x \in I$ όπου
$c_1,\dots,c_n$ η λύση του (S).
Παρατηρώ, η $\bar{y}$ είναι λύση της (E_0) με

$$\begin{cases} \bar{y}(x_0) = a_0 \\ \vdots \\ \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

ΑΣοΝ

λόγω θεώρ. μοναδικότητας της y, θα είναι
$y(x) = \bar{y}(x)$, $x \in I$